Matematica generale: svolgimento compito del 21 maggio 2012

Tutte le risposte vanno *motivate*: rispondere solo si, no, o dare soltanto il risultato non basta.

Gli esercizi 1 e 2 vanno svolti *perfettamente* prima di passare agli altri.

In presenza di errori negli esercizi 1 e/o 2 *il compito verrà considerato insufficiente*.

1. Denotando con $\mathrm{I}(x_0, r)$ l'intorno sulla retta reale di centro $x_0 \in \mathbb{R}$ e raggio $r \geq 0$, si considerino i 3 insiemi

$$A = \{x \in \mathbb{R} : -2 < |x+1|\}, \quad B = \{x \in \mathbb{R} : 2(x+1) - 3(x-1) > (x+1)^2 - x(x+2) + 6\}, \quad C = \mathrm{I}(-1, 4).$$

(a) Dire, motivando le risposte, se $A \subseteq B$ e se $C \subseteq A$.

(b) Determinare $A \cup B$ e $B \cup C$.

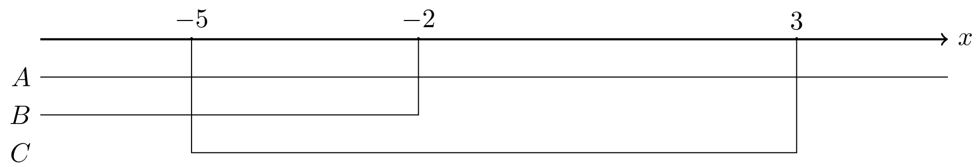
(c) Determinare $A \cap B$ e $B \cap C$.

Svolgimento.

Prima di tutto, troviamo i tre insiemi A, B e C. L'insieme A sono tutti i numeri x che soddisfano $|x+1| > -2$, e siccome il modulo è sempre positivo, a maggior ragione sarà sempre > -2, quindi A è tutto $\mathbb{R}$. Per trovare B, risolviamo

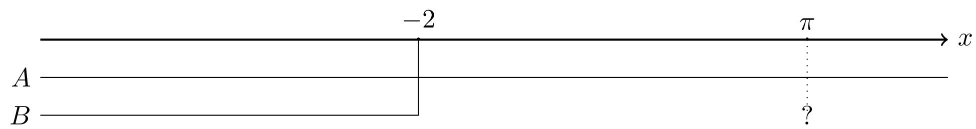
$$2(x+1) - 3(x-1) > (x+1)^2 - x(x+2) + 6$$

che con un paio di passaggi algebrici si riduce a $x < -2$. Quindi $B = (-\infty, -2)$. Infine l'insieme C è l'insieme di tutti i numeri che distano 4 da -1, cioè l'intervallo $(-5, 3)$. Per rispondere alle domande a), b) e c) conviene rappresentare gli insiemi in questione su $\mathbb{R}$.

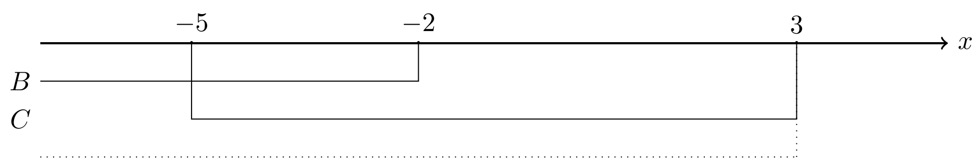


I punti degli insiemi sono rappresentati dalla linea continua. Notare che questo *non è uno studio del segno*, quindi non c'è la linea tratteggiata!

Un insieme è contenuto in un altro se la linea che lo rappresenta si trova interamente all'interno della linea che rappresenta l'altro insieme. Quindi $C \subseteq A$, perché sopra la linea che rappresenta C c'è sempre la linea che rappresenta A. Invece, $A \not\subseteq B$, perché la linea che rappresenta A non si trova sempre sopra la linea che rappresenta B (ad esempio, non si trova nessun punto di B in corrispondenza di π).

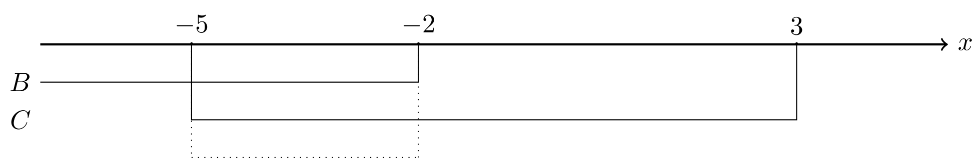


L'unione di 2 insiemi è data dai punti presenti in almeno uno degli insiemi, quindi dai punti che si trovano in almeno una linea continua. Dunque, l'unione di qualunque insieme con $\mathbb{R}$ dà sempre $\mathbb{R}$, mentre $B \cup C$ è dato da



$B \cup C = (-\infty, 3)$

L'intersezione di 2 insiemi è data dai punti presenti in entrambi gli insiemi, quindi dai punti che si trovano in entrambe le linee continue. Dunque, l'intersezione di qualunque insieme B con $\mathbb{R}$ è sempre B stesso, mentre $B \cap C$ è dato da



$B \cap C = (-5, -2)$

2. Risolvere la disequazione

$$\frac{2x^2 - 6x - 14}{x^2 - x} \leq 1.$$

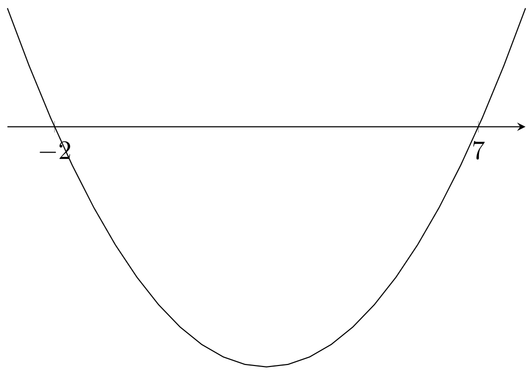
Svolgimento.

Prima di tutto, trasformiamo l'espressione in $f(x) \leq 0$.

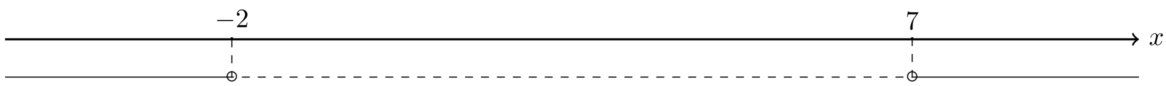
$$\frac{2x^2 - 6x - 14}{x^2 - x} \leq 1 \iff \frac{2x^2 - 6x - 14}{x^2 - x} - 1 \leq 0 \iff \frac{2x^2 - 6x - 14 - x^2 + x}{x^2 - x} \leq 0 \iff \frac{x^2 - 5x - 14}{x^2 - x} \leq 0.$$

Ora ci dimentichiamo del verso $\leq$, e guardiamo la funzione $f(x) = \frac{x^2-5x-14}{x^2-x}$.

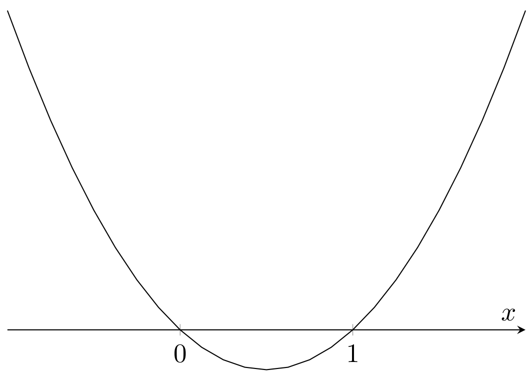
Essendo $f(x)$ una funzione razionale, dobbiamo studiare il segno del numeratore e del denominatore. Sia numeratore che denominatore sono trinomi di secondo grado, e il loro segno si studia disegnando la parabola associata. Le soluzioni di $x^2 - 5x - 14 = 0$ sono -2 e 7, e la derivata seconda è positiva, quindi la parabola $y = x^2 - 5x - 14$ ha come grafico



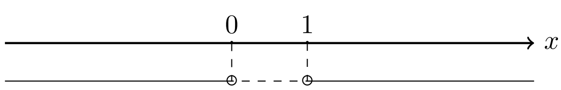
e il suo segno è quindi (notare i cerchietti che rappresentano i valori per cui il trinomio vale 0)



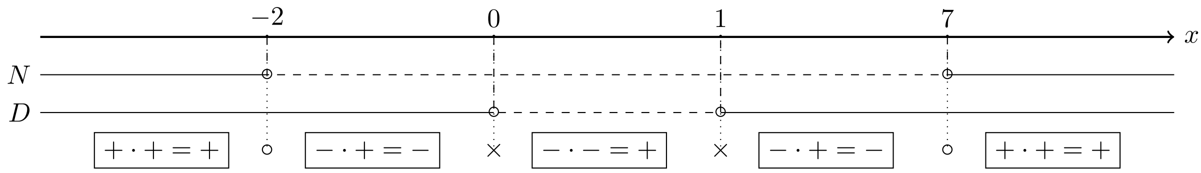
Lo stesso procedimento con la parabola a denominatore $y = x^2 - x$ fornisce



e segno



Il segno di tutta la funzione $f(x) = \frac{x^2-5x-14}{x^2-x}$ è quindi dato dalla regola dei segni (N e D indicano rispettivamente numeratore e denominatore):



Notare che la crocetta, che esclude il valore dai possibili risultati perché rappresenta una divisione per 0, si trova sulla linea del segno finale, e non sulla linea del denominatore!

Soltanto a questo punto andiamo a guardare il verso della disequazione, che era $\leq$.

Bene, questo vuol dire che le soluzioni cercate sono i punti sul grafico del segno che sono ≤ 0, cioè negativi, cioè quelli con il segno $-$.

E siccome il verso è $\leq$, e non $<$, vuol dire che dobbiamo prendere anche i valori per cui $f(x) = 0$, cioè i cerchietti! Il risultato finale è quindi $[-2, 0) \cup (1, 7]$.

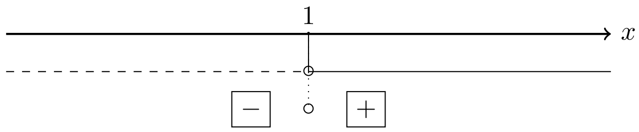
3. Data la funzione
$$f(x) = \begin{cases} x^3 - 1 & \text{se} \quad x \leq 1, \\ -x^2 e^x & \text{se} \quad x > 1, \end{cases}$$
determinarne
   (a) il dominio;
   (b) il segno;
   (c) gli eventuali asintoti;
   (d) gli intervalli di crescenza e decrescenza;
   (e) eventuali punti di massimo e minimo, sia locali che globali;
   (f) gli intervalli di convessità e concavità, e gli eventuali flessi;
   (g) il grafico.

Svolgimento.

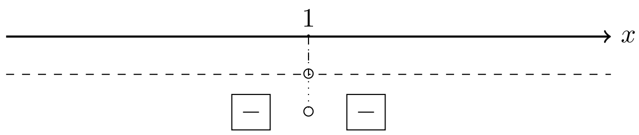
Chiamiamo f_1 ed f_2 rispettivamente $x^3 - 1$ e $-x^2 e^x$.

Il dominio per entrambe è $\mathbb{R}$, quindi il dominio di f è
$$(\mathbb{R} \cap (-\infty, 1]) \cup (\mathbb{R} \cap (1, +\infty)) = \mathbb{R}.$$

Il segno di f_1 è

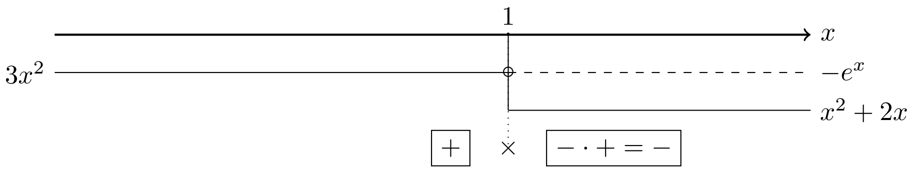


mentre il segno di f_2 è negativo ($-x^2$ è sempre negativo, e^x è sempre positivo). Quindi il segno di $f(x)$ è



Per gli asintoti, calcoliamo i limiti nei punti di accumulazione del dominio in cui non sappiamo a priori se $f(x)$ è continua o meno. Questi punti sono $-\infty$, $+\infty$ e 1^+. Abbiamo
$$\lim_{x\to-\infty} f_1(x) = -\infty, \quad \lim_{x\to-\infty} \frac{f_1(x)}{x} = +\infty, \quad \lim_{x\to+\infty} f_2(x) = -\infty, \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{f_2(x)}{x} = -\infty, \quad \lim_{x\to1^+} f_2(x) = -e,$$
e quindi non ci sono asintoti di nessun tipo.

La derivata prima è
$$f'(x) = \begin{cases} f_1'(x) = 3x^2 & \text{se} \quad x < 1, \\ f_2'(x) = -e^x(2x + x^2) & \text{se} \quad x > 1, \end{cases}$$
e quindi il suo segno è (sforzarsi di capire per bene perché)



Notare la crocetta, che rammenta il fatto che f non è derivabile in 1 (perché $f(1) = 0 \neq \lim_{x\to 1^+} f(x)$, e quindi f non è neanche continua in 1).

La funzione è quindi crescente in $(-\infty, 1)$ e decrescente in $(1, +\infty)$ (e discontinua per $x = 1$).

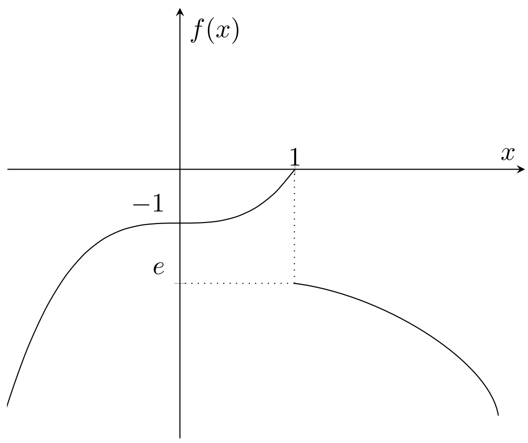
La derivata seconda è

$$f''(x) = \begin{cases} f_1''(x) = 6x & \text{se} \quad x < 1, \\ f_2''(x) = -e^x(x^2 + 4x + 2) & \text{se} \quad x > 1. \end{cases}$$

Per studiare il segno di $x^2 + 4x + 2$ non serve fare il solito studio della parabola. Basta osservare che se $x > 1$ ciascuno degli addendi è positivo, e la somma di 3 numeri positivi è sicuramente positiva!

Senza dilungarci ulteriormente, la concavità di f è quindi rivolta verso il basso in $(-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$, e rivolta verso l'alto in $(0, 1)$. L'unico punto in cui si annulla è $x = 0$, che è quindi un punto di flesso (con tangente orizzontale perché $f'(0) = 0$).

Riassumendo, il grafico finale di $f(x)$ è l'unione dei 2 grafici



4. Calcolare l'area della regione di piano delimitata dal grafico della funzione $f(x)$ dell'esercizio 3 e dall'asse delle x, in corrispondenza dell'intervallo $(-1, 2)$.

   Svolgimento.

   Dal grafico di funzione si vede che le aree sono date dall'opposto dell'integrale, perché $f(x)$ è sempre negativa. Si tratta quindi di calcolare

   $$A_1 = -\int_{-1}^{1} x^3 - 1\, dx \qquad \text{e} \qquad A_2 = -\int_{1}^{2} -x^2 e^x\, dx$$

   Questi integrali sono elementari, e vengono lasciati come esercizio. L'unica osservazione è che il secondo si svolge con 2 passaggi di integrazione per parti.

   Il risultato finale è

   $$A_1 = 2, A_2 = e(2e - 1), A = A_1 + A_2 = 2e^2 - e + 2.$$

5. Calcolare l'integrale

   $$\int_0^2 \frac{1 - 3x}{\sqrt{x}}\, dx.$$

   Svolgimento.

   Anche questo è elementare, una volta osservato che

   $$\frac{1 - 3x}{\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{3x}{\sqrt{x}} = x^{-1/2} - 3x^{1/2}.$$

   Viene $-2\sqrt{2}$.

6. Dire, giustificando la risposta, se le serie

$$\sum_{n=4}^{+\infty} 4^{2n} 4^{-2n} \qquad \text{e} \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}(1+n)}$$

convergono.

Svolgimento.

La prima serie è facile:

$$\sum_{n=4}^{+\infty} 4^{2n} 4^{-2n} = \sum_{n=4}^{+\infty} 1$$

e $\lim_{n\to+\infty} 1 = 1 \neq 0$, quindi la prima serie non converge.

Per la seconda serie, prima di tutto osserviamo che $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}(1+n)} = 0$, quindi dobbiamo studiarne l'eventuale convergenza. Poi, osserviamo che

$$\frac{1}{\sqrt{n}(1+n)} = \frac{1}{n^{1/2} + n^{3/2}}.$$

Poniamoci quindi la seguente domanda: quando n va verso infinito, chi prevale tra i 2 addendi $n^{1/2}$ e $n^{3/2}$? Quello con l'esponente maggiore, cioè $n^{3/2}$. Quindi la nostra serie è "come se fosse" $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$. Questa osservazione (unita al fatto che la nostra serie è a termini positivi) ci suggerisce di applicare il criterio del confronto asintotico con la serie geometrica

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$$

ottenendo

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{n}(1+n)}}{\frac{1}{n^{3/2}}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^{3/2}}{\sqrt{n}(1+n)} = 1 \neq 0.$$

Quindi il carattere della nostra serie è lo stesso della serie geometrica di confronto, che converge perché $3/2 > 1$.

7. **(solo 9 CFU)** Date le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

calcolare

(a) la trasposta della differenza: $(B-A)^{\mathrm{t}}$;

(b) il determinante della differenza: $\det(B-A)$;

(c) il quadrato di A: A^2.

Svolgimento.

$$(B-A)^{\mathrm{t}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -4 & -2 & 4 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}^{\mathrm{t}} = \begin{pmatrix} 0 & -4 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 1 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

Per calcolare il determinante, il modo più veloce è applicare Laplace sulla prima riga, ottenendo

$$\det(B-A) = \det \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -4 & -2 & 4 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix} = +1 \cdot \det \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = 6.$$

Infine, il prodotto righe per colonne della matrice A per se stessa fornisce

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 8 & -4 \\ 8 & 1 & 4 \\ 4 & -4 & -7 \end{pmatrix}.$$